

Рис. 15. Распределение напряжений по von-Mises в исследуемой геометрии без ортеза

1) разработанная КЭМ достаточно точно описывает геометрию шейного отдела позвоночника, включая адекватное геометрическое представление позвонков, межпозвоночных дисков, ортезов, мягких тканей и хрящей;

2) разработанная модель, включающая тканевые области и различные конструкции ортезов, является полностью параметризованной как по геометрии, так и по свойствам материалов;

3) конечно-элементная модель всей комплексной модели, включающей собственно ШОП, прилегающие ткани, элементы крепления и ортеза, а также нагрузки и закрепления, является варьруемой и управляемой.

Из анализа результатов численных исследований видно, что при использовании ортеза напряжения значительно снижаются в шейном отделе позвоночника как для кортикальной, так и для трабекулярной костей. Из анализа напряженного состояния ортезов видно, что наименьшие напряжения возникают при первом варианте ортеза, но при этом варианте наибольшие перемещения. Помимо снижения напряжений при ис-

пользовании ортопедического устройства значительным образом стабилизируются позвоночные сегменты, что способствует быстрейшему наращиванию костных тканей, что в свою очередь способствует быстрейшему выздоровлению пациентов.

Заключение. Разработанная модель шейного отдела позвоночника с ортезом обладает следующими свойствами, отличающими ее от ранее созданных:

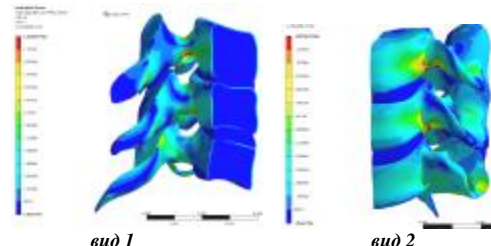


Рис. 16. Распределение напряжений по von-Mises в исследуемой геометрии с ортезом 1-й конструкции

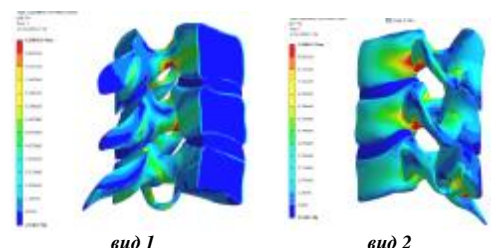


Рис. 17. Распределение напряжений по von-Mises в исследуемой геометрии с ортезом 2-й конструкции

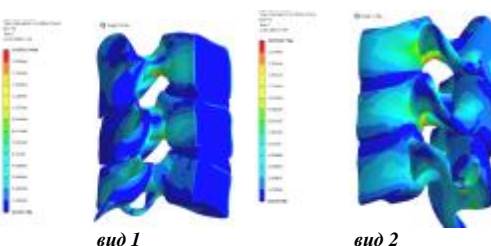


Рис. 18. Распределение напряжений по von-Mises в исследуемой геометрии с ортезом 3-й конструкции

пользовании ортопедического устройства значительным образом стабилизируются позвоночные сегменты, что способствует быстрейшему наращиванию костных тканей, что в свою очередь способствует быстрейшему выздоровлению пациентов.

Список литературы: 1. Веретельник О.В. Моделирование напряжений в шейном отделе позвоночника с ортезом // Вестник НТУ "ХПИ" Тем. вып.: "Машиноведение и САПР" – 2008. – № 9. – С.22-29. 2. Веретельник О.В. Обзор конструктивных схем и решений по моделированию ШОП и ортезов // Вестник НТУ "ХПИ" Тем. вып.: "Машиноведение и САПР" – 2008. – № 42. – С.3-8. 3. Heitplatz P., Hartle S.L., Gentle C.R. A 3-dimensional large deformation FEA of a ligamentous C4-C7 spine unit // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering – 2, – 1998 Gordon and Breach Science, UK. – P.387-394. 4. Веретельник О.В. Моделирование реакций на силовое воздействие элемента шейного отдела позвоночника // Вестник НТУ "ХПИ" Тем. вып.: "Машиноведение и САПР" – 2008. – № 2. 5. Веретельник Ю.В., Веретельник О.В., Тимченко И.Б., Дыньник А.А., Соснина Ю.К. К вопросу о построении параметрических моделей шейного отдела позвоночника. // Вестник НТУ "ХПИ" Тем. вып.: "Машиноведение и САПР" – 2007. – № 29. – С.16-20. 6. Барыш А.Е. Конечно-элементное бисегментарное моделирование позвоночных двигательных сегментов $C_{IV} - C_{VI}$ // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2005. – №1. – С.41-49. 7. Natarajan R.N., Chen B.H., An H.S., Andersson G.B.J. Anterior cervical fusion: a finite element model study on motion segment stability including effect of osteoporosis // Spine. – 2000. – Vol.25. – №8. – P.955-961. 8. Nolan J.P., Sherk H.H. Biomechanical evaluation of the extensor musculature of the cervical // Spine. – 1988. – Vol.13. – P.9-11. 9. Panjabi M.M., Duranceau J., Goel V., et.al. Cervical human vertebrae: quantitative three-dimensional anatomy of the middle and lower regions // Spine. – 1991. – Vol.16, №8. – P.861-869.

Поступила в редакцию 21.09.08

УДК 539.3

Ю.В. ВЕРЕТЕЛЬНИК, мл. науч. сотр. каф. ТММиСАПР,
Н.А. ТКАЧУК, д.т.н., зав. каф. ТММиСАПР,
Г.Д. ГРИЦЕНКО, к.т.н., проф. каф. ТММиСАПР

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕЛ С РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ ВЫРЕЗОВ

У статті описана постановка задачі та розвиток розрахунково-експериментального методу дослідження тіл з регулярною системою вирізів. З урахуванням специфіки тіл та особливостей їхнього напружено-деформованого стану запропоновано новий, „парціальний”, критерій відповідності числових та експериментальних досліджуваних тіл.

In the paper the problem definition and development of the computational and experimental method of research of bodies with the regular system of cutouts. Taking into account the specific of bodies and features of their stressed and deformed state, new partial criterion of adequacy between the numerical and experimental researches of bodies is offered.

Введение. В современном машиностроении широкое применение находят машины, элементы которых представляют собой тела с большим количеством вырезов. Примерами таких тел являются, например, базовые плиты технологи-

ческой оснастки, решетчатые конструкции, предназначенные для калибровки, подачи и пропускания технологического груза (как правило, сыпучей среды, жидкостей, газов, деталей малых размеров и т.д.), экранные конструкции, элементы эндопротезов человеческих органов и т.д. Присущее им нарушение регулярной геометрии области пространства, занимаемой телом, существенно затрудняет расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) этих тел, поскольку наличие вырезов приводит, как правило, к нарушению плавности распределения компонент НДС. Это приводит, в свою очередь, к необходимости сгущения конечно-элементных сеток при использовании метода конечных элементов (МКЭ) для более точного расчета напряженно-деформированного состояния этих тел, особенно в зонах резкого изменения геометрии. Учитывая, что при проектировании таких элементов необходимо в кратчайшие сроки проводить большое количество расчетов НДС при ограниченных вычислительных ресурсах и ограниченных возможностях распараллеливания вычислений, на первый план выдвигается задача разработки методов синтеза сбалансированных по точности и размерам численных моделей этих тел. Учитывая также, что наиболее распространенным и мощным методом моделирования напряженно-деформированного состояния тел сложной формы является МКЭ, а, кроме того, что уже предложен ранее расчетно-экспериментальный метод (РЭМ) синтеза параметров конечно-элементных моделей (КЭМ) тел произвольной формы при произвольном нагружении [1], возникает задача развития и адаптации этого метода применительно к телам с регулярной системой вырезов. Это определяет актуальность и важность данной задачи динамики и прочности машин, составляющей содержание статьи.

Цель работы. Как отмечалось выше, в процессе проектирования и исследования современных машин и оборудования, элементы которых содержат тела с регулярными системами вырезов (ТРСВ), возникают задачи обеспечения достоверности расчетных схем, применяемых для исследования их НДС. Применение расчетных схем в МКЭ требует в качестве исходных данных знания: параметров конечно-элементной разбивки исследуемых объектов, граничных условий, условий сопряжения и нагрузок. Точность исходных данных, в свою очередь, обеспечивает высокую точность численных результатов. В последующем при использовании данных моделей в САЕ-системах анализа и синтеза обеспечивается и точность исследований, и, как результат, заданные технические характеристики проектируемых элементов конструкций.

Существующие в настоящее время численные методы исследования напряженно-деформированного состояния, среди которых лидирующее положение занимает МКЭ, не обеспечивают только за счет внутренних средств контроль точности результатов моделирования по сравнению с поведением реальных объектов. Актуальной становится задача обеспечения достоверности используемых расчетных схем при численном исследовании элементов тел с вырезами. В работе предлагается развитие и адаптация расчетно-экспериментального метода исследований [1], при использовании которого в качестве основного результата выступают достоверные и точные расчетные

модели исследуемых объектов, в частности, элементов тел с системами регулярных вырезов.

1. Математическая формулировка задачи и общие методы решения. Задачу исследования напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем, в том числе ТРСВ, можно рассмотреть, следуя [1-3], следующим образом. Пусть \mathbf{R} – реальный исследуемый объект, поведение которого формально можно описать при помощи в общем случае искомого оператора L_R :

$$L_R(u_R, P_R, f, t) = 0, \quad (1)$$

где u_R, P_R, f, t – соответственно массивы переменных состояния, обобщенные параметры, внешняя нагрузка и время.

Математическую модель \mathbf{M} исследуемого объекта \mathbf{R} , получаемую в результате процесса идеализации I , описывает некоторый задаваемый оператор L_M :

$$L_M(u_M, P_M, f, t) = 0, \quad (2)$$

где в скобках – соответственно аналоги величин, фигурирующих в (1).

Численную модель \mathbf{N} (в данном случае – конечно-элементная модель), получаемую в результате процесса дискретизации D , описывает (в зависимости от используемых типов конечных элементов (КЭ), сетки разбиения области Ω , особенностей реализации в том или ином САЕ-пакете) оператор L_N :

$$L_N(u_N, P_N, f, t) = 0. \quad (3)$$

Здесь индексы N соответствуют сформированной конечно-элементной модели исследуемого объекта, процесса, состояния.

Численная модель подразумевает совокупность собственно дискретизированных уравнений, численных методов их решения, алгоритмов и программного обеспечения.

Для экспериментальной модели \mathbf{E} ее поведение в операторном виде по аналогии можно представить следующим образом:

$$L_E(u_E, P_E, f, t) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (1)-(4) формально описывают различные модели реального объекта и исследуемого процесса и состояния (на рис. 1 приведена схема исследования). В схеме процесс сравнения данных численных и экспериментальных исследований обозначен через S . Данный традиционный алгоритм предложен ранее в [1]. Он предлагает формализацию системы соответствий в множестве операторов L_* , а также последующую процедуру определения степени соответствия (несоответствия) моделей путем сравнения распределений переменных состояния u_i .

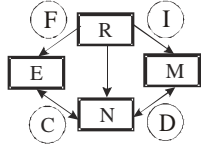


Рис. 1. Общая схема соотношения этапов исследования элементов ТРСВ:

R – реальный объект; **M** – математическая модель;
N – численная модель; **E** – экспериментальная модель;
F – физическое моделирование; **I** – идеализация;
D – дискретизация; **C** – сравнение

Именно процедура соответствий операторов является во многих случаях определяющей при построении сбалансированной по точности и сложности численной модели исследуемого объекта. В этой связи при выборе критерия соответствия моделей было бы нерационально выдвигать в качестве критерия формально-абстрактную величину (например, евклидову, энергетическую или чебышевскую норму несоответствия распределения состояния u_i), а ту величину, которая имеет четкий физический смысл, связанный с техническими характеристиками исследуемого объекта. Таким образом, общая постановка задачи, предложенная ранее, нуждается в развитии и адаптации к специфическим особенностям исследуемых объектов.

В частности, в данной работе предлагается принцип расслоения операторов задачи и характеристик НДС исследуемых объектов. Действительно, в некоторых случаях удается представить операторы, описывающие поведение того или иного объекта, в виде совокупности несвязанных операторов (например, разделить плоское напряженное состояние и изгиб пластин). Однако даже если такое расслоение сделать затруднительно или невозможно, всегда можно вычленить отдельные группы характеристик реального объекта, его математической, численной и экспериментальной моделей так, что соответствие можно рассматривать не по полному массиву переменных состояния, а по отдельным группам характеристик или же по отдельным характеристикам (рис. 2).

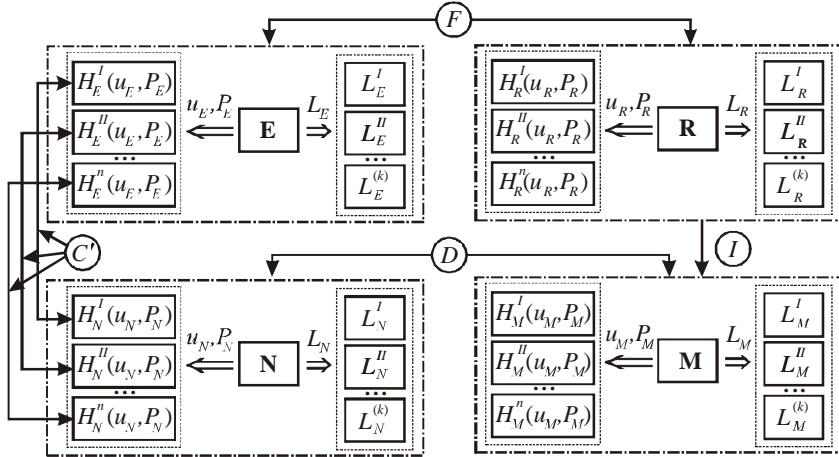


Рис. 2. Предлагаемый вариант расчетно-экспериментального метода синтеза конечно-элементных моделей исследуемых объектов

При таком подходе само соответствие достаточно просто формализовать на уровне „математическая модель – численная модель”. Однако „технологические” сложности возникают при установлении такого соответствия на уровне „численная модель – экспериментальная модель” (см. рис.2). В данном случае особые требования предъявляются к методу экспериментальных исследований: он должен быть достаточно универсальным, чтобы его результаты можно было бы трансформировать к нужному для сравнения с результатами численных исследований виду.

Выбор метода экспериментального исследования НДС тел с регулярной системой вырезов был проведен исходя из критериев полноты, точности, информативности и универсальности. Исходя из этого, предпочтение было отдано методу спекл-голографической интерферометрии (МСГИ) [4]. Как показывает практика исследования ТРСВ, именно этап сопоставления результатов численных и экспериментальных исследований в настоящее время разработан недостаточно: отсутствуют методы и алгоритмы **сравнения полей** u_R, u_M, u_N, u_E ; требуют развития технологии **верификация** модели в части точности и достоверности параметров P, f ; не исследуется **полнота** модели; не производится **рационализация** моделей (определение их значимых факторов). Особенно актуальной задача определения соответствия результатов численных и экспериментальных исследований становится для случая предлагаемой технологии, представленной на рис. 2, в том варианте, когда заранее (до проведения исследований) неизвестен ни способ „расслоения” моделей, ни „вычлениваемые” значимые характеристики.

Как отмечается в [1-3], исходя из предположений, что этап **I** – достаточно корректен; этап **D** характеризуется сходимостью, точностью и устойчивостью (для МКЭ эти вопросы достаточно исследованы); этап **F** – при использовании МСГИ достаточно точен для тел с произвольной геометрией, требование соответствия результатов исследований ТРСВ на всех этапах моделирования **R, M, N, E** предполагает соответствие результатов в звене **C** (**C'**) (см. рис.1, 2). При этом наиболее узким местом является обоснованный выбор на различных этапах: параметров дискретизации модели ТРСВ (этап **D**); вычленение значимых параметров и характеристик моделей (этапы **R, M, N, E**); степени полноты множества обобщенных параметров и характеристик (этап **I, D**).

Сведя к минимуму погрешности в цепочке этапов **I, D** и **F**, исходную задачу, следуя [1], можно представить в виде определения такого множества параметров P_N , чтобы с наперед заданной точностью описать поведение реального объекта:

$$P_N^*, f_N^* : I(u_N - u_E) \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Здесь I – мера несоответствия результатов численных и экспериментальных

исследований ($\Delta u_{NE} = u_N - u_E$).

При этом можно выделить следующие типы задач [1]: определение типа КЭ и (или) характеристик генерируемых конечно-элементных сеток; определение или уточнение величины, структуры, типа и (или) закона распределения внешних нагрузок на исследуемые объекты; уточнение граничных условий и условий сопряжения (для системы тел); определение типа и свойств материалов, из которых изготовлен исследуемый объект; определение границ и условий применимости тех или иных моделей; определение чувствительности моделей \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{E} к изменению параметров; определение зависимости контролируемых характеристик модели от варьируемых параметров модели; построение „экспресс-моделей” и „экспресс-систем” для оценки прочностных и жесткостных характеристик ТРСВ, в том числе для множества объектов того или иного класса.

Основное противоречие, возникающее при использовании предложенного подхода, заключается в том, что формальное применение критерия (5) (например, как отмечалось выше, использование евклидовой, энергетической или чебышевской нормы для определения меры несоответствия $I(u_N - u_E)$) не учитывает специфических особенностей исследуемых объектов и требуемых от них технических характеристик. При этом получаемая в результате численная модель является несбалансированной по размерам и точности не полных результатов моделирования, а именно нужной их части. Действительно, для описания геометрии и конечно-элементной модели ТРСВ требуется гораздо более подробная детализация, чем без вырезов. В то же время зачастую исследователю или проектировщику важны не локальные характеристики (например, характер распределения напряжений в зоне резкого изменения геометрии тела вблизи выреза), а глобальные или интегральные характеристики (максимальные прогибы, собственные частоты, критические усилия при потере устойчивости, контактные давления и т.д.).

Таким образом, исходная постановка задачи по сравнению с соотношениями (5) нуждается в развитии и адаптации для тел с системой вырезов. В частности, предлагаются следующие обобщения предлагаемого подхода.

Формально оставляя в силе структуру исследований, представленную на рис. 1, предлагается модифицировать сам критерий соответствия переменных состояния (см. рис. 2). Вместо формального, не связанного напрямую с особенностями НДС объекта и условиями его функционирования критерия соответствия предлагается применение критерия, естественно следующего из той или иной технической характеристики или специфики напряженно-деформированного состояния. Так, например, для многих базовых плит станочных приспособлений, основным назначением которых является обеспечение базирования и закрепления обрабатываемых деталей на станке, основной характеристикой, определяемой НДС, является жесткость на изгиб. Именно эта характеристика является доминирующей величиной, определяющей прогибы, углы поворота закрепленного на ней объекта, что напрямую влияет на точность обработки детали. При этом для случая малых прогибов и незначи-

тельных усилий, действующих в плоскости, распределение нормальных перемещений не зависит от тангенциальных перемещений. В таком случае естественно в качестве критерия несоответствия выбрать

$$I^P = \max\{|w_N - w_E|/|w_E|\}, \quad (6)$$

где w_N , w_E – численно и экспериментально определенные прогибы точек плиты.

Аналогичные соображения и критерии можно выдвинуть при расчетно-экспериментальном синтезе конечно-элементных моделей ТРСВ при определяющем значении, например, жесткости при действии вполне определенного типа внешних усилий, собственных частот колебаний, контактных давлений и т.п.

Естественно, что условие (6) намного слабее условия, в котором участвуют, например, перемещения в срединной плоскости и напряжения. При этом можно ожидать, что и требования к густоте конечно-элементной сетки окажутся слабее. Кроме того, этот критерий может быть основой для оправдания применения оболочечных элементов вместо объемных. Уже эти два фактора на несколько порядков могут уменьшить размерность КЭМ, а, значит, в еще большей степени – требуемое время и вычислительные ресурсы для решения единичной задачи анализа НДС базовой плиты. Учитывая, что в процессе проектирования может потребоваться проведение нескольких тысяч таких расчетов, то, соответственно, существенно уменьшится общее время исследований без ущерба для точности определения значимых технических характеристик и обоснованности принятия соответствующего проектного решения.

Обобщая приведенный выше алгоритм, можно предложить следующий порядок действий при расчете НДС тел с регулярной системой вырезов:

1. Определение на основе анализа конструкции требований к техническим характеристикам и условий эксплуатации *частного* („парциального”) критерия I^P для синтеза КЭМ исследуемого класса тел с регулярной системой вырезов.
2. Предварительный качественный анализ особенностей НДС исследуемого объекта и выбор того или иного типа конечных элементов для разбики области Ω , занимаемой телом.
3. Построение параметризированной, управляемой, качественной конечно-элементной модели, дающей возможность автоматизации пре- и постобработки извне пакетов конечно-элементного анализа НДС.
4. Проведение серии численных и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния ТРСВ для определения параметров КЭМ, удовлетворяющей критерию (6) или аналогичному.
5. Решение прикладных задач анализа НДС и синтеза элементов машин, оборудования и конструкций, представляющих собой ТРСВ, с использованием синтезированной на основе «парциальных» критериев КЭМ.

Каждый из перечисленных этапов должен проводиться с учетом характерных свойств исследуемых объектов – наличием большого количества регулярных вырезов.

В данном случае естественно исходить из того, что для того или иного типа конструкций, представляющих собой ТРСВ, для формирования баз данных, знаний и экспертных систем на основе расчетно-экспериментальных исследований во многих случаях самостоятельную ценность имеют не только и не столько экспериментально проверенные результаты численных исследований, но и рационально сбалансированная достоверная КЭМ объекта.

Конечно-элементная модель сложного объекта (в данном случае – тела с регулярными системами вырезов) может иметь также и большую коммерческую ценность. Кроме того, полученные с ее применением результаты могут быть положены в основу иерархической базы данных и знаний о том или ином классе ТРСВ, причем объектами сравнения могут быть не только отдельные базы данных, а множества баз данных. Также могут быть усовершенствованы соответствующие критерии улучшения модели **N** и проектируемого объекта **R**. Окончательным результатом исследований по предлагаемой методике (см. рис. 2) является достоверная конечно-элементная модель для определения НДС тех или иных ТРСВ или их множеств.

При решении поставленной задачи с применением предложенного варианта РЭМ ее можно обратить. Действительно, рассмотрев задачу формально, можно одновременно с параметрами численных моделей ТРВС варьировать и определять в качестве искомым параметры математической и экспериментальной моделей, которые обеспечивают соответствие результатов исследований на всей цепочке $I - D - C - F$ (см. рис. 1, 2). В таком случае можно либо определить структуру и параметры определенной модели ТРВС (*узкая задача*), либо определить в пространстве варьируемых параметров некоторые области, в пределах которых те или иные различные модели адекватны, точны, корректны (*широкая задача*).

Таким образом, формально в процессе расчетно-экспериментальных исследований ТРВС можно „уравнять в правах” все типы моделей, выделив из всего множества подмножество уточняющих моделей и подмножество уточняемых моделей. Сами эти подмножества могут изменяться за счет „миграции” моделей. Более того, идя дальше по пути формализации предложенного варианта расчетно-экспериментального метода исследований, можно (в соответствии с алгоритмом на рис. 2) углубить данный подход, переводя его на уровень слоев и характеристик моделей. При таком подходе варьируются не модели в целом (как при традиционном подходе), а их подмодели или характеристики.

Таким образом, можно сделать вывод, что для построения сбалансированных по точности и громоздкости численных моделей ТРСВ предложен новый подход. Он опирается на известную технологию расчетно-экспериментального исследования элементов сложных механических систем. Однако, в отличие от применения критерия „полного” соответствия результатов численных u_N и экспериментальных u_E исследований, предложен частный („парциальный”) критерий соответствий или по компонентам массива переменных состояния, или по некоторым характеристикам НДС, которые напрямую завязаны на технические характеристики исследуемого объекта.

Именно данная особенность позволяет вместо моделирования напряженно-деформированного состояния ТРСВ как сплошного тела без вырезов, материал которого имеет некоторые „приведенные”, „эквивалентные” физико-механические свойства, исследовать НДС с использованием конечно-элементного моделирования на реальной геометрии с вырезами.

2. Методы оценки несоответствия полей распределений различной природы. При формулировке задачи расчетно-экспериментального исследования ТРСВ можно вычленив следующие основные проблемы: метод сравнения полей разной природы и происхождения; оценка точности численных исследований НДС ТРСВ при помощи МКЭ; модификация теоретических основ метода спекл-голографической интерферометрии с точки зрения оценки точности и взаимодействия с МКЭ; построение меры несоответствия результатов экспериментальных и численных исследований НДС ТРСВ; выбор методов минимизации меры несоответствия результатов численного и экспериментального исследования. Ниже, следуя [1-3], рассмотрим исследуемый объект как механическую систему взаимодействующих тел, поведение которой (математическая модель) описывается в общем виде в операторной форме выражением (2).

В частности, для большинства случаев удобно сформулировать напряженно-деформированное состояние в перемещениях. В этом случае переменные состояния $U_M = \bigcup_s u_{M_i}^{(s)}$, где $u_{M_i}^{(s)} = u_{M_i}^{(s)}(r_i, t)$ – массив перемещений точек элемента s исследуемой системы функций с радиус-вектором \mathbf{r} с компонентами r_i ($i=1,2,3$), соответствующих моменту времени t . Соответственно $P_M = \bigcup_s p_M^{(s)}$, $F_M = \bigcup_s f_M^{(s)}$.

Например, для некоторого элемента исследуемой системы (массивное тело) общее уравнение (1-4) расписывается в виде системы уравнений (индексы $*$, $_M$ опущены) в области Ω , занимаемой телом [5]:

$$2\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}; \quad \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0, \quad (7)$$

где $\sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций, связь между которыми задается тензором упругих постоянных C_{ijkl} ; \bar{f}_i – составляющая объемной нагрузки.

Соотношения (7) дополняются граничными условиями

$$u_i|_{S_u} = g_i(\mathbf{r}), \quad (8) \quad \sigma_i|_{S_\sigma} = \bar{f}_i(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где S_u, S_σ – части поверхности тела, на которых заданы геометрические и силовые граничные условия; g_i, \bar{f}_i – заданные вектор-функции перемещений и поверхностных нагрузок.

В случае контактного взаимодействия тел p, q с гладкими поверхностями

на части поверхности S_c каждого тела добавляются условия непроникновения:

$$(u_v^p + u_v^q) \Big|_{S_c} \leq \delta(\mathbf{r}), \quad (10)$$

где u_v – составляющая перемещения по нормали v к поверхности; δ – начальный зазор в сопряжении тел.

Как известно [6, 7], исходная задача (1), (2), (7)-(10) приводится к вариационной задаче

$$(\bar{L}_m u_m, v_m) = (f_m, v_m), \quad \forall v_m, \quad (11)$$

где \bar{L}_m – оператор краевой задачи внутри области Ω ; $(*,**)$ – соответствующая билинейная форма, или вариационному неравенству

$$(\bar{L}_m u_m, v_m - u_m) \geq (f_m, v_m - u_m), \quad \forall v_m \in G, \quad (12)$$

где G – множество, задаваемое ограничениями (10).

Вариационная задача (11) или неравенство (12) приводятся к проблеме минимизации функционала $I(u_m)$ [8]:

$$I(u_m) = 1/2(\bar{L}_m u_m, u_m) - (f_m, u_m) \rightarrow \min. \quad (13)$$

Для случая (11) ищется безусловный минимум, а для случая (12) – минимум на множестве G в пространстве функций u_m . Данный квадратичный функционал состоит из квадратичной $a(u_m, u_m)$ и линейной $b(u_m)$ форм. При этом квадратичная форма в (13) представляет собой потенциальную энергию деформации исследуемой системы, а линейная – работу внешних сил. Например, для пространственной задачи теории упругости билинейная форма, порождающая квадратичную составляющую (13), имеет вид:

$$a(u_m, v_m) = (\bar{L}_m u_m, v_m) = \int_{(\Omega)} \sigma_{ij}(u_m) \varepsilon_{ij}(v_m) d\Omega, \quad (14)$$

а линейная –

$$b(u_m) = (f_m, u_m) = \int_{(S_n)} \bar{f}_i \cdot u_{m_i} dS + \int_{(\Omega)} \bar{f}_i \cdot u_{m_i} d\Omega. \quad (15)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния тел исследуемой системы, т.е. решения некоторой текущей задачи анализа, необходимо или решить систему уравнений (2), (9) (или неравенств (10) для случая контактного взаимодействия), или вариационное уравнение (11) (соответственно неравенство (12)), или произвести минимизацию функционала (13).

При решении задачи определения НДС предполагается, что она корректна (по Адамару). При этом кроме классических требований разрешимости, единственности и устойчивости, т.е.:

$$\forall f_m \exists u_m : L_m(u_m, p_m, f_m, t) = 0, \quad (16)$$

$$[L_m(u_m^1) = 0, L_m(u_m^2)] = 0 \Rightarrow u_1 = u_2, \quad (17)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_m^\varepsilon - f_m\| = 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\| = 0, \quad (18)$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма; u_ε – решение (4.1) для $f_m = f_m^\varepsilon$, предполагается еще и требование устойчивости по отношению к изменению оператора \bar{L}_m (как структурному, так и параметрическому), а также граничных условий (8), (9) и условий контактного непроникновения (10). Последние условия распространяются и на функции $\bar{g}_i, \bar{f}_i, \bar{\delta}$ из (8)-(10), и, соответственно, на поверхности S_u, S_σ, S_c . Соотношения (1), (2), (7)-(18) составляют математическую модель для определения напряженно-деформированного состояния ТРСВ.

Оператор \bar{L}_m исследуемой задачи действует как оператор \bar{L}_m в области Ω и характеризуется типом оператора, его структурой, физико-механическими характеристиками, определяемыми свойствами материала, а также физической размерностью области Ω . На границе действуют различные граничные условия, характеризующие тип краевых условий, внешние нагрузки, условия контактного взаимодействия. Кроме того, сама область Ω имеет некоторую форму и геометрические размеры. То же относится к границе S и ее составляющим.

Все указанные данные различной природы составляют множество обобщенных параметров математической модели исследуемого тела. Естественно, что при переходе от реального объекта к его математической модели допускается некоторая погрешность. В соответствии с этим необходимо в различных случаях решать следующие типы задач: уточнение оператора краевой задачи (тип, структура); уточнение краевых условий; уточнение нагрузок (тип, величина, распределение); уточнение условий сопряжения; уточнение формы, размеров, гладкости областей Ω, S .

Для численного решения задачи минимизации функционала (13) в настоящее время часто применяется метод Рунге с базисными кусочно-полиномиальными функциями – метод конечных элементов [9]. Тогда, вводя пространство V^n (n – количество узлов сетки КЭ) базисных функций МКЭ, исходную задачу можно привести к проблеме минимизации функционала

$$I^n(q^n) = 1/2 K_{ij} q_i q_j - b_i q_i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где $K_{ij} = (L\phi_i, \phi_j)$ – коэффициенты матрицы жесткости конструкции K ; ϕ_i – базисная функция МКЭ; $b_i = (f_i^N, q_i)$ – элементы массива узловых нагрузок.

Условия минимальности (19) дают систему линейных алгебраических уравнений

$$K \cdot q = b, \quad (20)$$

которая соответствует операторному аналогу (3).

Таким образом, при дискретизации исходной задачи производится переход от функционального пространства функций U_N к пространству конечной

размерности V^N . Поскольку V^N является замкнутым подпространством U_M , то для решения u_N и ошибки МКЭ $\Delta_N = (u_M - u_N)$ справедливы следующие утверждения [9]:

$$a(u_M - u_N, u_M - u_N) = \min_{v_N \in V^N} a(u_M - v_N, u_M - v_N); \quad (21)$$

$$a(u_M - u_N, v_N) = 0, \quad \forall v_N \in V^N; \quad (22) \quad a(u_N, v_N) = b(v_N) \quad \forall v_N \in V^N; \quad (23)$$

$$a(\Delta_N, \Delta_N) = a(u_M, u_M) - a(u_N, u_N); \quad (24) \quad a(u_N, u_N) \leq a(u_M, u_M). \quad (25)$$

Таким образом, в пространстве с энергетической нормой решение u_N является проекцией решения u_M на пространство V^N , причем энергия ошибки равна ошибке в энергии.

Для евклидовой нормы ошибки справедлива оценка

$$\|\Delta_N\| \leq C_N h^\xi \|u_N\|, \quad (26)$$

где h – размер конечного элемента; ξ – показатель, зависящий от типа задачи.

Зависимости и соотношения (12)-(26) носят качественный характер. Тем не менее, из этих зависимостей можно сделать вывод о том, что теоретическая точность МКЭ в силу эллиптичности исследуемых задач может быть оценена качественно в различных нормах (энергетическая, евклидова, чебышевская). При этом тенденция изменения нормы ошибки должна быть монотонной: начиная с некоторого момента с уменьшением размеров конечных элементов ошибка уменьшается по обратной степенной зависимости.

Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем предполагает наличие самого объекта исследований или его физической модели, измерительной аппаратуры, регистрирующих приборов, оборудования для расшифровки полученных результатов. Все эти элементы объединены при помощи специально разработанных схем, которые реализуют тот или иной способ измерений. Голографическая интерферометрия [4] предоставляет исследователю мощный инструмент определения перемещений точек поверхности исследуемых элементов механических систем. Особенностью голографической интерферометрии является возможность проведения бесконтактных измерений как на физической модели исследуемого объекта, так и на самом объекте. При этом, как и любой другой метод экспериментальных измерений, метод голографической и спекл-интерферометрии допускает формальную запись в виде (4). Информация, получаемая в результате записи интерферограмм, представляет собой множество изолиний некоторых проекций перемещений точек поверхности исследуемых ТРСВ.

Рассмотрим стадии расшифровки интерферограмм. Задача расшифровки может быть сформулирована следующим образом: по заданному множеству полос M_p определить непрерывное поле перемещений u_i ($i = 1, 2, 3$) на части исследуемой поверхности Γ с минимальной погрешностью. Для решения дан-

ной задачи используются известные соотношения МГСИ [4]. Однако при этом возникают вопросы: идентификации номеров полос N ; идентификации средних линий \tilde{L}_s полос; интерполяции промежуточных значений компонент вектора перемещений на заданной сетке S^- ; определение путем интерполирования значений компонент вектора u_i^I перемещений в произвольных точках.

Решение задачи идентификации средних линий интерференционных полос предполагается осуществлять по следующему алгоритму (рис.3).

1. Над полем дискретно заданных (в ячейках $J(i, j) = \{0; 1\}$ на рис. 3) булевых значений, идентифицирующих наличие-отсутствие полосы, совершается операция выделения „средних” линий L_i по правилу: точка $\tilde{M} \in \tilde{L}_k$, если $abs(dist[MM'] - dist[MM'']) / |MM'| < \tilde{\pi}$, где $\tilde{\pi}$ – некоторый заданный параметр точности; M', M'' – точки, образуемые расширением зоны примыкания к теку-

щей внутренней точке M (круг с центром M и нарастающим радиусом) до одно-временной встречи с двух сторон с ячейками, в которых $J(i, j) = 0$.

2. Множеству точек $\tilde{M} \in \tilde{L}_q$ присваивается численное значение $q \cdot \lambda / 2$ (начиная с некоторой указанной исследователем полосы с условно „нулевым” номером).

3. При повторном обходе линий \tilde{L}_i проводится операция замыкания средней

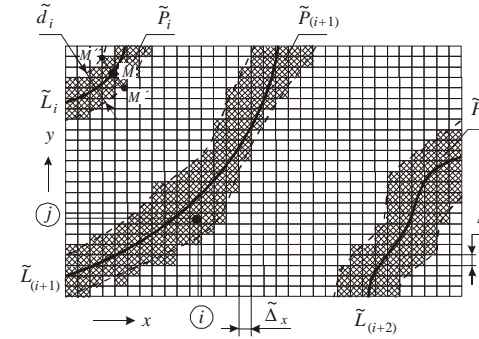


Рис. 3. Картина полос \tilde{P}_i , заданных в системе ячеек $J(i, j)$: $\tilde{\Delta}_x, \tilde{\Delta}_y$ – размеры ячеек, (i, j) – номер ячеек; \tilde{L}_i – средняя линия; \tilde{P}_i – полоса интерферограммы

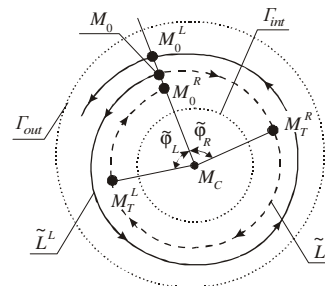


Рис. 4. Операция замыкания средней линии интерференционных полос

линии интерференционных полос (рис. 4): если точка M_0 – исходная на некоторой линии, то при обходе за и против часовой стрелки образуется множество текущих точек M_T^R, M_T^L , принадлежащих веткам \tilde{L}^R, \tilde{L}^L ; точки M_T^R, M_0, M_T^L и некоторая внутренняя точка $M_C \in S_{\Gamma_{int}}, M_C \in S_{\Gamma_{out}}$, где $S_{\Gamma_{int}}, S_{\Gamma_{out}}$ – области, ограниченные внутренним и внешним контурами и образующие при пересечении область между $\Gamma_{int}, \Gamma_{out}$. Луч $M_C M_T$ образует углы $\tilde{\phi}_L, \tilde{\phi}_R$; тогда опреде-

ляются замыкающие точки M_0^R, M_0^L по правилу:

$$\tilde{\phi}_L(M_T^L) = 2\pi, \tilde{\phi}_R(M_T^R) = 2\pi. \quad (27)$$

В связи с тем, что в силу дискретности задания картины полос линии \tilde{L}^R, \tilde{L}^L в общем случае не совпадают, то для выделения единой линии предлагаются следующие способы:

- строится “коридор” линий:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_D(\tilde{\phi}) &= \min \left\{ |M_C M_T^L|, |M_C M_T^R| \right\}, \\ \tilde{\rho}_U(\tilde{\phi}) &= \max \left\{ |M_C M_T^L|, |M_C M_T^R| \right\}; \end{aligned} \quad (28)$$

- строится непрерывное или дискретно заданное множество $\Omega_{\tilde{L}}$ линий, удовлетворяющих ограничениям

$$\tilde{\rho}_D(\tilde{\phi}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{\phi}) \leq \tilde{\rho}_U(\tilde{\phi}), \quad \tilde{\rho}(\tilde{\phi}_0) = |M_C M_0|, \quad (29)$$

где $\tilde{\rho}(\tilde{\phi})$ – текущий радиус-вектор точки с началом в точке M_C ;

- на множестве $\Omega_{\tilde{L}}$ определяется линия \tilde{L}^* , удовлетворяющая некоторому дополнительному условию

$$F_{\tilde{L}}(\tilde{L}) = 0, \quad (30)$$

например, требованию минимальной кривизны линии.

Таким образом, описанный выше подход позволяет произвести идентификацию средних линий полос и попутно присвоить их точкам числовую характеристику, соответствующую перемещению точек полосы с определенным номером.

Задача интерполяции значений перемещений по картине линий уровня может решаться различными способами. Пусть \tilde{P} – некоторая точка (узел сетки S^- , наброшенной на исследуемую область). На рис. 5 приведена схема к двум способам интерполяции значения компоненты \tilde{w} вектора перемещений в точке \tilde{P} .

1. Полиномиальная интерполяция

вдоль сечения. Рассмотрим луч \tilde{l} из точки \tilde{P} , проходящей под углом $\tilde{\phi}_P$ к горизонтали.

Пусть \tilde{P}_i^* – точки встречи луча с полосами, \tilde{P}_i^{**} – точки встречи луча под углом $(\tilde{\phi}_P + \pi)$.

Из условия прохождения некоторым полиномиальном соответствующей степени через точки

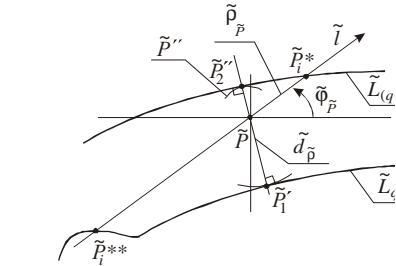


Рис. 5. К вопросу интерполяции перемещений в промежуточных точках

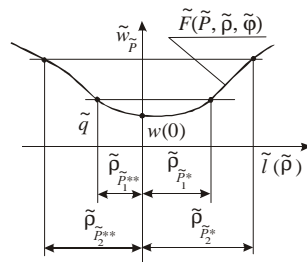


Рис. 6. Интерполяция искомой функции вдоль сечений
и от угла ϕ

$(-\tilde{\rho}_{\tilde{P}_i^{**}}, \tilde{q}(\tilde{P}_i^{**}))$ и $(+\tilde{\rho}_{\tilde{P}_i^*}, \tilde{q}(\tilde{P}_i^*))$ (рис. 6) строится интерполирующий полином \tilde{F} от переменной \tilde{l} , изменяющейся при изменении угла $\tilde{\phi}$. Значение \tilde{F} при $\tilde{l} = 0$ (обозначим $\tilde{F}_0(\tilde{\phi}_P)$) интерполирует искомое значение перемещения в точке \tilde{P} . Естественно, что при изменении угла $\tilde{\phi}$ меняется значение \tilde{F}_0 , и в результате выбранной точке \tilde{P} соответствует множество значений \tilde{w} , являющихся функцией угла $\tilde{\phi}$ (рис.7).

Для определения единственного значения \tilde{w} возможны различные подходы. Их можно условно разбить на 2 группы. При использовании локального подхода задачи рассматривается изолированно для выбранной точки \tilde{P} , и тогда из функции \tilde{w} по некоторому закону определяется „средневзвешенное” значение \tilde{w} :

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\tilde{w}(\tilde{\phi}) - \tilde{g}(\tilde{\phi})] d\tilde{\phi} \quad (31)$$

или

(32)

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{w}(\tilde{\phi}_i) \cdot \tilde{g}(\tilde{\phi}_i),$$

где $\tilde{g}(\tilde{\phi})$ – некоторая заданная весовая функция, подчиняющаяся соответственно условиям нормировки

$$\int_0^{2\pi} \tilde{g}(\tilde{\phi}) d\tilde{\phi} = 2\pi \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{g}(\tilde{\phi}_i) = 2\pi. \quad (33)$$

Рассматривая значения \tilde{w} во взаимосвязи с множеством значений \tilde{w} в остальных точках исследуемой области, можно построить некоторый относительно глобальный критерий. Например, можно потребовать от поверхности $\tilde{S}_{\tilde{P}}$, образованной точками \tilde{P} , некоторых свойств гладкости, минимальности кривизны или наименьшего значения некоторой нормы. В частности, представляет интерес для множества практически важных задач критерий минимальности нормы

$$\tilde{I} = \tilde{\alpha} \int_{(\tilde{S}_{\tilde{P}})} \tilde{w}^2 d\tilde{S}_{\tilde{P}} + \tilde{\beta} \int_{(\tilde{S}_{\tilde{P}})} \left[\left(\frac{d\tilde{w}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{w}}{dy} \right)^2 \right] d\tilde{S}_{\tilde{P}} + \tilde{\gamma} \int_{(\tilde{S}_{\tilde{P}})} \left[\left(\frac{d^2\tilde{w}}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2\tilde{w}}{dy^2} \right)^2 \right] d\tilde{S}_{\tilde{P}}, \quad (34)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ – некоторые задаваемые из специфики задач весовые коэффициенты ($\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1$).

Оправданно использование в качестве функционала \tilde{I} величины внутренней энергии или другого (в т.ч. „парциального”) функционала, выбор структуры которого диктуется спецификой исследуемой конструкции, явления, процесса. В таком случае задача может быть формализована следующим образом:

$$\tilde{w}^\wedge : \tilde{I}(\tilde{w}) \rightarrow \min \text{ на множестве } \tilde{M}_{\tilde{w}}; \quad (35)$$

где $\tilde{M}_{\tilde{w}} = \{\tilde{w} : \tilde{w}_{\min}(\tilde{P}) \leq \tilde{w}(\tilde{P}) \leq \tilde{w}_{\max}(\tilde{P})\}$. Здесь $\tilde{w}_{\min}(\tilde{P})$, $\tilde{w}_{\max}(\tilde{P})$ – значения ограничений коридора варьирования искомого перемещений (см. рис. 7).

2. *Полиномиальная интерполяция вдоль радиусов касательных окружностей*. При рассмотрении интерполяции значений $\tilde{w}(\tilde{P})$ (см. рис. 6) некоторые направления выделяются естественным образом. Например, это направления из точки \tilde{P} по кратчайшему расстоянию до линии \tilde{L}_q . При достаточно гладких линиях в локальной окрестности \tilde{P} это множество точек касания окружностей растущего радиуса с центром в точке \tilde{P} (т.е. точки \tilde{P}' , \tilde{P}'' на рис.6). В данном случае в качестве независимой переменной выступают расстояния $d_{\tilde{P}'}$, $d_{\tilde{P}''}$ (рис. 8).

Значение интерполирующего полинома в нуле интерполирует искомую функцию в точке \tilde{P} . Кроме рассмотренных вариантов интерполяции с выбором определенных направлений интерполирования возможно использование локальной интерполяции искомой функции как функции двух переменных. Действительно, искомую функцию локально можно представить в виде квадратичной формы

$$\tilde{F}_{\tilde{P}}(x, y) = \tilde{\mu}_1 x^2 + \tilde{\mu}_2 y^2 + \tilde{\mu}_3 xy + \tilde{\mu}_4 x + \tilde{\mu}_5 y + \tilde{\mu}_6. \quad (36)$$

Неопределенные коэффициенты $\tilde{\mu}_i$ в выражении (36) могут быть рассчитаны из условий прохождения интерполирующей поверхности через некоторое множество точек. Основной проблемой при этом является обоснованный выбор данного множества точек. Он может быть продиктован или спецификой решаемой задачи, или характером поведения полос в локальной окрестности точки \tilde{P} . Для однозначного определения коэффициентов $\tilde{\mu}_i$ в выражении (36) необходимо минимум 6 значений функции или задание множества точек с количеством, превышающим минимально необходимое, и заданием дополнительного критерия (т.е. применения критерия минимального квадратичного отклонения или иного условия, которое позволяет однозначно определить функцию $\tilde{F}_{\tilde{P}}(x, y)$). Значение $\tilde{F}_{\tilde{P}}(0, 0)$ интерполирует $\tilde{w}(\tilde{P})$. В общем случае нельзя выделить приоритетный способ интерполяции. Наиболее разумным представляется использование различных способов и их комбинаций. При получении значительного разброса значений $\tilde{w}(\tilde{P})$, получаемых при использовании различных методов, необходимо дополнительное исследование поведения функции \tilde{w} в окрестности точки \tilde{P} .

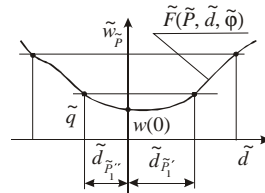


Рис.8. Интерполяция искомой функции вдоль радиус-векторов с началом в точке \tilde{P} и концом на ближайших точках линии

Таким образом, для определения значений \tilde{w} в узлах сетки S^- , наброшенной на исследуемую область, можно использовать описанные выше методы. Это дает возможность перехода к интерполяции значений функции w^\wedge в произвольной точке P^\wedge . Прямое определение w^\wedge возможно, но только при использовании так называемого (см. выше) локального подхода. При неизбежном наличии шумов на носителе, погрешностей процессов расшифровки и интерполяции более предпочтительным путем является использование описанного выше глобального подхода, что требует обязательной первичной интерполяции \tilde{w} на узлах сетки S^- , последующего „сглаживания” w^\wedge , а затем интерполяции w^\wedge в произвольных точках исследуемой области.

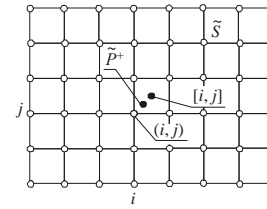


Рис.9. Интерполяция значений функции по узловым значениям функции w^\wedge

Рассмотрим интерполяцию функции w^\wedge по значениям $\hat{w}_{i,j}$ в узлах сетки S^- с номерами i, j (рис. 9). Пусть \tilde{P}^+ – заданная точка, в которой требуется определение значения w^\wedge . Пусть также $[i, j]$ – принятое обозначение (нумерация) ячейки сетки S^- (при этом i, j – минимальные номера узлов, образующих ячейку). Обозначая через $\{i, j\}$ “звезду” ячеек с центром в узле (i, j) , можно ввести в рассмотрение локальный базис $\hat{f}(i, j)$. Функции базиса с локальным носителем

– „звездой” ячеек $\{i, j\}$. Тогда значение функции в произвольной точке \tilde{P}^+ определяется в виде разложения по базисным функциям

$$\hat{w}(\tilde{P}^+) = \sum_{s, \hat{i}=1}^2 \left[\hat{w}(i + \hat{s} - 1, j + \hat{i} - 1) \cdot \hat{f}(i + \hat{s} - 1, j + \hat{i} - 1) \right]. \quad (37)$$

В общем случае выражение (37) может быть записано с учетом значений функций и их производных в узлах. В частности, по значениям функций, производных первого порядка и смешанной производной второго порядка строятся интерполяционные полиномы Эрмита:

$$\hat{f}_1 = \hat{\Phi}(i) \cdot \hat{\Phi}(j); \quad \hat{f}_2 = \hat{\Phi}(i) \cdot \hat{\Psi}(j); \quad \hat{f}_3 = \hat{\Psi}(i) \cdot \hat{\Phi}(j); \quad \hat{f}_4 = \hat{\Psi}(i) \cdot \hat{\Psi}(j),$$

где $\hat{\Phi}, \hat{\Psi}$ – функции аргументов с локальным носителем, определяемые по формулам

$$\Phi(\eta) = (|\eta| - 1)^2 (2|\eta| + 1); \quad \Psi(\eta) = \eta(|\eta| - 1)^2. \quad (38)$$

Приведенные функции характеризуются следующими свойствами:

$$\Phi_i(x_i) = 1, \Phi_i(x_{i \neq j}) = 0, \Phi'_i(x_i) = 0; \quad (39) \quad \Psi_i(x_i) = 0, \Psi'_i(x_{i \neq j}) = 0, \Psi'_i(x_i) = 1; \quad (40)$$

$$\hat{f}_1(x_i, y_i) = \frac{\partial \hat{f}_2(x_i, y_i)}{\partial y} = \frac{\partial \hat{f}_3(x_i, y_i)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \hat{f}_4(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} = 1. \quad (41)$$

Остальные сочетания функций, производных и их узловых аргументов в выражении (41) дают нулевые значения.

Таким образом, обобщение формулы (37) в виде

$$\hat{w}(\tilde{P}^+) = \sum_{i, j \in J_{\tilde{P}^+}} \left[\hat{w}^{(s)}(i, j) \cdot \hat{f}_s(i, j) \right], \quad (42)$$

где $\hat{w}^{(1)} = \hat{w}$, $\hat{w}^{(2)} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}$, $\hat{w}^{(3)} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}$, $\hat{w}^{(4)} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y}$; $J_{\tilde{P}^+}$ – множество узлов, при-

надлежащих ячейке, в которую попадает точка \tilde{P}^+ , дает возможность получить

локальное полиномиальное представление функции \hat{w} (при этом обеспечиваются условия непрерывности функции и ее производных на границах ячеек).

Таким образом, в данном разделе предложены: способ перехода от непрерывного поля интерференционных полос к дискретному полю изолиний, далее – к дискретно заданному множеству значений функций на узлах некоторой сетки, и последующий переход к непрерывному полю компонент вектора перемещений, которое описывается интерполяционными полиномами.

Особенностью предложенного подхода является формализация всех этапов экспериментальных исследований. Это позволяет, во-первых, автоматизировать процессы измерений, регистрации, расшифровки и интерполяции результатов. Во-вторых, соотношения (27)-(42) составляют математический аппарат, посредством которого формально расширяется поле действия аппарата математической физики на экспериментальные исследования. Кроме того, предложенный математический аппарат позволяет идентифицировать источники и провести оценки накопленных на разных этапах ошибок.

В процессе проведения экспериментальных исследований возникают следующие задачи уточнения обобщенных параметров: определение адекватности объекта или его модели множеству исследуемых объектов (т.е. соответствие свойств конкретного изделия или группы изделий, на которых проводятся измерения, свойствам, которыми обладают элементы всего множества аналогичных объектов); определение соответствия моделируемых величин и законов распределения нагрузки и граничных условий реально действующим; определение диапазона нагрузок, позволяющих проверить измерение картины деформирования исследуемого тела с приемлемой точностью (т.е. подбор диапазона нагрузок, в котором интерференционные полосы, во-первых, присутствуют на регистрирующей среде; во-вторых, их количество позволяет проводить сам процесс расшифровки); определение схем измерений, методов расшифровки и интерполяции, которые в конкретном случае дают необходимую точность измерений.

Анализ предложенных подходов позволяет сделать следующие выводы:

1. Разработанные методы получения информации о деформации объекта по результатам экспериментальных исследований элементов сложных механических систем позволяют перейти от графического образа (картины интерференционных полос), т.е. практически непрерывного распределения исследуемых функций, к дискретной системе значений на наперед заданной сетке узлов, а в завершение – к непрерывному заданию данных функций через интерполяционные функции.

2. Предложенная совокупность методов позволяет регулировать точность регистрации измерений, аппроксимаций и вычислений на каждом этапе исследований.

3. На основе разработанных подходов возможна формализация операций сравнения с результатами экспериментальных исследований и приведение информации, с которой производятся различные операции в дальнейшем, к удобному виду.

4. Методы сглаживания полей распределений искомым функций позволяют уменьшить влияние факторов дискретности на всех этапах экспериментальных исследований методом голографической и спекл-интерферометрии (зернистость регистрирующей среды, наложение спекл-структуры на картину интерференционных полос, дискретный характер сетки узловых значений исследуемых функций).

5. Система поэтапной обработки информации позволяет провести автоматизацию процесса исследований и решить основную задачу: определение достаточной точностью значений искомым функций в заданной точке.

6. Предложенные методы позволяют реализовать идею расширенного параметрического подхода применительно к этапу экспериментальных исследований.

7. Предложены методы уменьшения погрешностей измерений за счет применения технологии измерений, соединяющих голографию и спекл-фотографию.

8. Описанные методы обработки информации в конечном счете позволяют привести ее к форме, которая легко трансформируется к виду, используемому в системах автоматизированного проектирования, исследования и изготовления машиностроительных конструкций.

Численная оценка функционала несоответствия. Одним из важнейших аспектов построения функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований является процедура его вычисления. Действительно, при сравнении полей компонент перемещений, заданных на поверхностях в пространстве трех измерений, важно получить численную характеристику, которая отражает две стороны: совпадение *качественное*, т.е. степень соответствия закона распределения по пространственным координатам, тенденции изменения во времени или реакция на изменение того или иного параметра; совпадение *количественное*, т.е. точность численного моделирования измеряемой экспериментально функции.

Естественно, что в интегральной оценке совмещены оба приведенных

требования. Рассмотрим форматы сравниваемых величин. При использовании метода конечных элементов искомые компоненты вектора перемещений формально определяются в любой точке исследуемого тела, в том числе и на поверхности, через базисные функции φ_N^\cup и узловые значения u_N^\cup . Таким образом, в рассмотрении находятся следующие данные: описание области Ω^\cup , занимаемой телом, в виде ансамбля конечных элементов (т.е. при численном исследовании задаются массив координат узлов χ^\cup , матрица конечных элементов M^\cup , определяющая узлы, которые образуют различные конечные элементы); узловые параметры u_N^\cup ; тип представления искомой компоненты вектора перемещений через узловые параметры и базисные функции МКЭ:

$$\bar{u}_N^\cup(x) = \sum_{E^\cup} u_N^\cup(E^\cup) \varphi_N^\cup(E^\cup, x), \quad (43)$$

где E^\cup – подмножество узлов, образующих элемент, которому принадлежит точка x ; φ_N^\cup – базисная функция метода конечных элементов.

Результаты экспериментальных исследований МСГИ имеют следующую структуру данных: сетка S^\sim узлов J^\wedge , покрывающих исследуемую часть поверхности объема S ; узловые параметры u_E^\wedge ; выражение искомой компоненты вектора перемещений в заданной точке x через узловые параметры и интерполяционные функции \hat{f} :

$$\bar{u}_E^\wedge(x) = \sum_{j^\wedge} u_E^\wedge(j) \hat{f}(j, x), \quad (44)$$

где j^\wedge – подмножество узлов ячейки, в которую попадает точка x .

Несмотря на кажущуюся эквивалентность структуры выражений (43) и (44), их сопоставление через непосредственное вычисление по приведенным формулам применимо для сравнения данных только в отдельных точках. В то же время непосредственное применение формул (43) и (44) для вычисления функционала несоответствия $I(\bar{u}_N^\cup, \bar{u}_E^\wedge)$ проблематично. Действительно, основное отличие представлений \bar{u}_N^\cup и \bar{u}_E^\wedge на данном этапе состоит в том, что они определяются через различные дискретные множества (множества конечных элементов и узлов конечных элементов, с одной стороны, и множество ячеек и узлов интерполяции – с другой). Для устранения возникающих при этом проблем возможны следующие пути:

1. Приведение численных данных, вычисляемых по выражению (43), к узлам J^\wedge сетки S^\sim , используемой при представлении результатов экспериментальных исследований.

2. Приведение экспериментальных данных, вычисляемых по формуле

(44), к узлам χ^\cup множества конечных элементов M^\cup (из конечно-элементной модели исследуемого объекта).

3. Приведение численных и экспериментальных результатов к некоторому искусственно созданному дискретному множеству R^* узлов ячеек (элементов) T^* с базисными функциями ξ^* . Тогда

$$\bar{u}_N = \sum_{r^*} \bar{u}_N^\cup(x(r^*)) \cdot \xi^*(r^*, x), \quad (45) \quad \bar{u}_E = \sum_{r^*} \bar{u}_E^\wedge(x(r^*)) \cdot \xi^*(r^*, x), \quad (46)$$

где r^* – подмножество узлов, образующих элементарный фрагмент искусственно созданной сетки T^* .

Формально третий путь оказывается наиболее универсальным, поскольку отсутствует привязка к формам представления численных и экспериментальных данных. Тогда с учетом выражений для функционала $I(\bar{u}_N^\cup, \bar{u}_E^\wedge)$, содержащего операции суммирования \sum и (или) интегрирования \int и выражений (45)-(46) можно записать для некоторых случаев:

$$I(\bar{u}_N^\cup - \bar{u}_E^\wedge) = \left\{ \sum, \int \right\} \left\{ \sum_{r^*} (\bar{u}_N^\cup - \bar{u}_E^\wedge) \cdot \xi^*(r^*, x) \right\}^2. \quad (47)$$

Учитывая перестановочность операций суммирования и интегрирования, выражение (47) может быть представлено в виде:

$$I(\bar{u}_N^\cup - \bar{u}_E^\wedge) = \sum_{r_1^*} \sum_{r_2^*} \left[\bar{u}_N^\cup(r_1^*) - \bar{u}_E^\wedge(r_1^*) \right] \cdot \left[\bar{u}_N^\cup(r_2^*) - \bar{u}_E^\wedge(r_2^*) \right] \cdot \left\{ \sum, \int \right\} \cdot [\xi(r_1^*, x) \cdot \xi(r_2^*, x)]. \quad (48)$$

Введя обозначение $\Delta \bar{u}_{NE}^* = \bar{u}_N^\cup(r_1^*) - \bar{u}_E^\wedge(r_1^*)$, выражение для функционала $I(\bar{u}_N^\cup, \bar{u}_E^\wedge)$ можно записать в виде

$$I(\Delta \bar{u}_{NE}^*) = \sum_{r_1^*} \sum_{r_2^*} [\bar{\alpha}^*(r_1^*, r_2^*) \cdot \Delta \bar{u}^*(r_1^*) \cdot \Delta \bar{u}^*(r_2^*)], \quad (49)$$

где через $\bar{\alpha}^*(r_1^*, r_2^*)$ обозначен результат применения операции интегрирования (суммирования) в выражении (48)

$$\bar{\alpha}^*(r_1^*, r_2^*) = \left\{ \sum, \int \right\} \cdot [\xi(r_1^*, x) \cdot \xi(r_2^*, x)]. \quad (50)$$

Таким образом, вычисление функционала $I(\bar{u}_N^\cup, \bar{u}_E^\wedge)$ сводится к определению квадратичной формы (50) с известными коэффициентами. Указанный способ вычислений формально остается в силе при использовании любого формата представления данных численных и экспериментальных результатов.

Методы минимизации функционала несоответствия результатов чис-

ленных и экспериментальных исследований. Специфика минимизируемого функционала $I(\Delta u_{NE}, \bar{p})$ (здесь \bar{p} – множество варьируемых параметров), состоит в том, что заранее неизвестен характер изменения I по параметрам \bar{p} . Кроме того, сама область варьирования этих параметров может быть задана при помощи достаточно сложной системы трудноформализуемых соотношений. В связи с этим нельзя заранее определить тип возникающей задачи математического программирования, а также ни предпочтительный метод минимизации, ни критерий окончания процесса поиска минимума.

Следующим специфическим моментом является то, что для определения значений функционала в различных точках параметрического пространства требуется численное решение задачи определения НДС. В работе приведены методы автоматизации процесса построения параметризованных конечно-элементных моделей исследуемых объектов. Таким образом, большая часть задачи решается в автоматизированном режиме, что существенно ускоряет весь процесс исследований. Особенно это важно при многовариантных исследованиях, когда требуется чрезвычайно большое количество решений задач анализа. Важным фактором является также тот факт, что в связи с бурным развитием возможностей вычислительной техники время решения задач резко уменьшается, особенно для задач средней размерности. Учитывая эти обстоятельства, можно заключить, что „цена” решения отдельной задачи анализа МКЭ уменьшается. Следовательно, появляется возможность увеличения количества вычислительных циклов, связанных с определением значения минимизируемого функционала в отдельных точках параметрического пространства.

Отмеченные особенности выдвигают на первый план такие особенности применяемых методов минимизации, как их универсальность, высокую вероятность отыскания минимума функционала I , устойчивость, сходимость и достигаемую точность даже в ущерб вычислительным затратам.

Поскольку на данный момент не существует универсального алгоритма определения минимума функции общего вида многих переменных, а каждый отдельный метод имеет свои преимущества и недостатки, то представляется целесообразным при решении возникающей задачи использовать комбинации различных методов: методы по координатного спуска, сопряженных направлений, Ньютона. Предлагается комплексный метод поиска минимума.

3. Методы регуляризации физических и численных моделей тел с системой вырезов. „Регуляризация” формы областей с системой регулярных вырезов и с другими особенностями геометрии. Исследуемые ТРСВ имеют большое количество отверстий, пазов, вырезов. Они имеют различные функциональные назначения: закрепление, базирование, центрирование и т.д. При этом часть поверхности S_r^* детали состоит из регулярного „паркета” элементарных поверх-

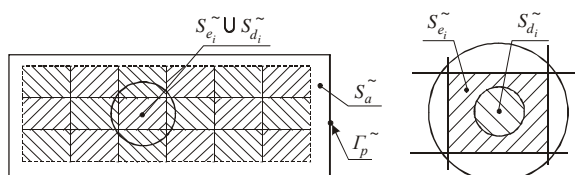


Рис. 10. Полная исследуемая поверхность S_p^*

ностей:

$$S_r^* = \bigcup_i S_{e_i}^* \quad (51)$$

Если S_p^* – полная исследуемая поверхность элемента ТРСВ, т.е. поверхность, ограниченная наружным контуром Γ_p^* (рис. 10), то во многих случаях ее можно представить в виде $S_p^* = S_r^* \bigcup S_d^* \bigcup S_a^*$, где $S_d^* = \bigcup_i S_{d_i}^*$ – воображаемая поверхность, “занятая” вырезами, пазами; S_a^* – сплошной участок поверхности S_p^* .



Рис. 11. Наложение картин интерференционных полос на подобласти выборки материала

На голографической интерферограмме, фиксирующей поле перемещений точек поверхности элемента ТРСВ, основным информационным носителем являются интерференционные полосы. Естественно, что при расшифровке картины полос в автоматизированном режиме возникает ситуация (рис. 11), когда некоторые подобласти $S_{d_i}^*$

пересекают несколько интерференционных полос. Следуя формальному правилу принадлежности некоторой точки полосе с определенным номером (например, правило: все выбранные точки (ячейки) принадлежат одной и той же полосе, если из каждой точки (ячейки) в каждую можно попасть вдоль линии, каждая точка которой принадлежит данной полосе), можно получить, что все полосы, проходящие через одну и ту же область выборки материала, имеют один и тот же номер. Искаженная картина может быть исправлена дополнительной процедурой идентификации, причем в некоторых ситуациях необходимо проводить эту операцию вручную.

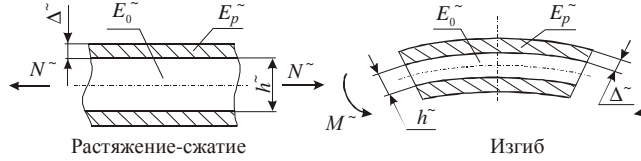
В то же время достаточно часто при исследовании аналогичных элементов ТРСВ задачу можно разбить на 2 подзадачи: определение картины напряженно-деформированного состояния в зонах выборки материала; определение общей картины деформирования исследуемого элемента тела с регулярными системами вырезов.

Первая из указанных задач решается для обособленных фрагментов общей картины распределения компонент НДС и сформулированных выше трудностей не содержит. При решении второй задачи возникает проблема избавления от множества особенностей формы. Действительно, более удобной при обработке является картина полос по области S_p^* без особенностей. Для решения данной задачи необходимо рассмотреть ее физическую и математическую стороны.

Физически область S_p^* можно получить, покрыв исследуемую поверхность тонкой эластичной пленкой, создающей сплошную однородную по-

верхность и, в то же время, практически не искажающей картину НДС в оригинальной детали, получаемую без наложения пленки.

Рис. 12.
Схема
наложения
пленки на
исследуемый
объект



С математической точки зрения важно оценить количественно вносимую покрытием погрешность и определить область применимости предложенного метода. На рис. 12 представлена схема наложения пленки на исследуемый объект при растяжении-сжатии и изгибе. Здесь E_o^- – модуль упругости основного материала, E_p^- – модуль упругости материала пленки. Жесткость на растяжение и изгиб изменяется в пределах

$$\lambda_1^- = 1 + (E_p^- / E_o^-) \cdot (2\Delta^- / h^-); \quad \lambda_2^- = 1 + (E_p^- / E_o^-) \cdot (2\Delta^- / h^-) \cdot 6 \quad (52)$$

соответственно.

Обозначая соотношение модулей в выражениях (52) λ_{E^-} , а отношения толщин λ_{h^-} , можно записать выражение для относительной погрешности при использовании пленки

$$\epsilon^- = k^- \cdot \lambda_{E^-} \cdot \lambda_{h^-}, \quad (53)$$

где k^- – некоторый ограниченный коэффициент, зависящий от типа напряженно-деформированного состояния в окрестности той или иной выборки материала. Видно, что для уменьшения погрешности измерений необходимо наклеивать относительно тонкую пленку из относительно податливого материала.

Внесение в исследуемую систему дополнительного покрытия формально означает, например, что исходный функционал полной внутренней энергии системы изменяется. Так, квадратичная его часть состоит в таком случае из двух слагаемых: $a_N^-(u^-, u^-) = a_o^-(u^-, u^-) + a_p^-(u^-, u^-)$, где составляющие a_o^- и a_p^- выражают вклад основного материала и материала пленки. Тогда с учетом выражения (53)

$$a_N^-(u^-, u^-) = a_o^-(u^-, u^-) (1 + 2k^-), \quad (54)$$

где $k^- \ll 1$ – среднеинтегральный коэффициент, отражающий специфику напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта.

Поскольку в исходной постановке задачи предполагается устойчивость исследуемой задачи к изменению параметров системы, то погрешность, вносимая наклеиваемой индикаторной пленкой, будет того же порядка, что и k^-

в выражении (54).

Кроме требований, предъявляемых к материалу и толщине индикаторной пленки, необходимо соблюдение дополнительных требований, диктуемых особенностями используемого метода голографической интерферометрии.

1. Поскольку при появлении в областях выборки материала зон сжатия или сдвига в тонких пленках могут возникать „выпучины”, то во избежание наложения локальных всплесков распределений перемещений необходимо создать в индикаторной пленке предварительное деформированное состояние (например, двухосное растяжение), такое, что в каждой точке $\epsilon_0^- + \epsilon_E^- \geq 0$, где ϵ_0^- – предварительная деформация в пленке; ϵ_E^- – деформация в процессе нагружения исследуемого объекта эксплуатационными нагрузками.

3. В областях S_e^- требуется высокая адгезия индикаторной пленки, поскольку в противном случае в отдельных областях может быть получена существенно искаженная картина НДС исследуемого объекта.

4. Индикаторная пленка должна обеспечивать удовлетворительные светоотражающие качества, т.е. быть достаточно равномерно по всей области диффузно отражающей поверхностью, что обеспечивает хорошее качество голографических интерферограмм.

Таким образом, индикаторная пленка является своеобразной „маской”, устраняющей нерегулярности геометрии поверхности исследуемых объектов, но полностью отражающей в целом характерные свойства их деформированного состояния. Показано, что достаточно тонкая пленка из низко модульного материала, нанесенная на исследуемую поверхность способом, обеспечивающим высокую адгезию с основным материалом с одновременным созданием предварительного растяжения, позволяет получать практически неискаженную картину деформированного состояния элемента тела с регулярными системами вырезов.

Формально трактуя выражение (54), которое по структуре соответствует структуре функционала при применении процедуры регуляризации задач математической физики, можно говорить о „регуляризации” в том смысле, что в исследуемую систему вносится незначительный дополнительный элемент, позволяющий для корректной задачи устранить „некорректность” формы границы области. Таким образом, в результате применения индикаторной пленки образуется новая система, практически совпадающая по жесткостным характеристикам с исследуемым объектом, но при этом позволяющая в автоматизированном режиме интерпретировать картину интерференционных полос.

Что касается математической и численной модели ТРСВ, то их регуляризацию можно провести путем замещения вырезов низко модульным материалом. В этом случае исследуемая область избавляется от нерегулярностей, а НДС меняется достаточно мало.

В статье предложен комплекс методов для решения задачи вычисления и минимизации функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований. Разработана процедура приведения данных различ-

ной природы к универсальному формату. Задание массива данных в виде совокупности параметров, привязанных к узлам создаваемой исследователем сетки, которая покрывает исследуемую область, позволяет распространять на поля различного происхождения операции вычитания, суммирования (интегрирования по областям или под областям), а также любые другие операции. Этот формат, отделенный от форматов данных эксперимента и численных исследований, можно трактовать как некоторый „экран”, на который проецируются два потока информации („Е” и „N”). При этом данный носитель информации по структуре формально независим от структуры носителей „Е”, „N”. Указанные особенности позволяют абстрагироваться от технологии проведения численных и экспериментальных исследований в каждом конкретном случае, а также распространить на задачу минимизации функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований классических методов математического программирования. Предложенная технология „зашивания” нерегулярностей геометрической формы позволяет привести все операции на поверхностях исследуемых объектов к операциям с односвязными областями. Таким образом, предложенные подходы обеспечивают приведение исходной задачи к ряду задач, технология решения которых достаточно отработана.

Заключение. В статье разработан единый подход к расчетно-экспериментальному исследованию тел с регулярными системами вырезов. При этом можно сделать выводы:

1. Разработанная обобщенная математическая модель для исследования прочностных и жесткостных характеристик тел с регулярными системами вырезов соединяет все этапы от составления систем уравнений до сравнения численных результатов с экспериментальными данными

2. Задача синтеза достоверных конечно-элементных моделей ТРСВ на основе „парциальных” критериев получила полную математическую формализацию.

3. Достоверность расчетных моделей ТРСВ обеспечивается соединением преимуществ метода конечных элементов и метода спекл-голографической интерферометрии: путем сравнения полей различного происхождения (причем каждый из методов – МКЭ и МСГИ – обладает высокой точностью и широкими возможностями) удается замкнуть цикл расчетно-экспериментальных исследований, получив не только конкретные результаты для конкретной задачи, но также достоверную численную модель.

4. Разработанные методы автоматизированного перевода графического портрета деформирования элементов сложных механических систем в численный формат данных обладают свойствами устойчивости и обеспечения плавности получаемых при расшифровке полей искомых функций.

5. Конкретизация функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований, проведенная в работе, позволяет получить численную характеристику при сравнении полей перемещений точек элементов сложных механических систем.

6. Разработка единого формата данных для вычисления функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований да-

ет возможность удобного и точного его вычисления.

7. Модифицированные методы минимизации функционала позволяют экономно, с достаточной универсальностью и гарантированностью произвести поиск параметров, обеспечивающих высокое качество расчетных моделей исследуемых объектов.

8. Метод „регуляризации” формы тел с большим количеством отверстий, пазов, выборок позволяет формально перейти к сравнению распределения искомых величин в односвязной области.

Таким образом, предложенный в работе подход после формализации основных этапов исследований при помощи соответствующего математического аппарата реализован в виде конечного числа задач, методы решения которых приведены выше.

Список литературы: 1. Ткачук Н.А., Грищенко Г.Д., Глуценко Е.В., Ткачук Г.В. Решение задач расчетно-экспериментального исследования элементов сложных механических систем // Механіка та машинобудування. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2004. – № 2. – С. 85-96. 2. Ткачук Н.А., Бруль С.Т., Малакей А.Н., Грищенко Г.Д., Орлов Е.А. Структура специализированных интегрированных систем автоматизированного анализа и синтеза элементов транспортных средств специального назначения // Механіка та машинобудування. – 2005. – № 1. – С.184-194. 3. Ткачук Н.А., Грищенко Г.Д., Четурной А.Д., Орлов Е.А., Ткачук Н.Н. Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания // Механіка та машинобудування. – 2006. – №1. – С.57-79. 4. Вест Ч. Голографическая интерферометрия. – М.: Мир, 1982. – 504 с. 5. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с. 6. Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // Прикл. мат. и мех. – 1977. – Т.41. – Вып.2. – С.329-337. 7. Кравчук А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. мат. и мех. – 1978. – Т.42. – Вып.3. – С.466-474. 8. Кравчук А.С., Суряков В.А. Численное решение геометрически нелинейных контактных задач. // Доклады АН СССР, 1981. – Т.259. – №6. – С.1327-1329. 9. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

Поступила в редколлегию 10.03.2009

УДК 621.01:539.3

В.И. ГОЛОВЧЕНКО, канд. техн. наук, нач. бюро,
В.А. ШКОДА, канд. техн. наук, нач. бюро,
Л.Е. ПОЛЕТУН, гл. конструктор ОАО “Головной специализированный конструкторско-технологический институт”, г. Мариуполь,
Т.В. ПОЛИЩУК, зам. генерального директора ОАО „Азовобщешахт”, г. Мариуполь

РАСЧЕТЫ МЕХАНИЗМОВ НАКЛОНА ДУГОВЫХ СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧЕЙ

Наведено короткий опис конструкцій дугової сталеплавильної печі, вимоги, що пред'являються до механізму її нахилу, а також приклади розрахунків, що виконуються при проектуванні механізму